

2. Петросян А.Э. Выделение метана в угольных шахтах М. Наука 1975. -188с.
3. Газета «Коммерсантъ-Daily» от 24 апреля 1998г.
4. Выполнить исследования состояния охраны труда и результатов реализации Программы повышения уровня безопасности труда на угледобывающих предприятиях и разработать мероприятия по предотвращению аварий. Отчет по НИР1710202030 (промежуточный) МакНИИ/Руководители Левкин Н.Б., Кузьменко Н.С. – Макеевка – Донбасс, 2003. – 101с.
5. Програма підвищення безпеки праці на вугільних шахтах. Сучасний стан і проблеми охорони праці. Зав. пост. Кабінету Міністрів України. – К. : Укр. – інформ. прав. Центр. – 2002. – С. 45-77.
6. Брюханов А.М., Кудинов Ю.В. О состоянии научных исследований по „Программе повышения безопасности труда на угольных шахтах” //Сб. научн. тр. МакНИИ - 2003. – С. 11-16.
7. ГОСТ 22782.5-78 «Электрооборудование взрывозащищенное с видом взрывозащиты «искробезопасная электрическая цепь».

УДК 622.02:551.345:536.2

Канд. техн. наук В.В. Круковская
(ИГТМ НАН Украины)

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Використано метод кінцевих елементів для розв'язання задачі нестационарної теплопровідності з фазовим переходом у мерзлих породах кріолітозони. Наведено розподіли температурних полів у часі навколо виробок, що закріплені набрызкбетоном та з незакріпленим контуром.

TO THE PROBLEM SOLVING OF UNSTEADY THERMAL CONDUCTIVITY BY THE FINITE ELEMENT METHOD

Use of a finite element method for a modeling of non-stationary thermal conductivity in frozen rocks with change of phase is considered. Distributions of temperature in a time around of excavations which are fixed by concrete and with the unfixed contour are resulted.

Проведение и эксплуатация горных выработок в условиях криолитозоны имеет специфические особенности, связанные с пониженной температурой вмещающих пород. Их оттаивание инициирует множество физических процессов: изменение температурных напряжений, процессы фильтрации оттаявших вод, уменьшение прочности геоматериалов при циклическом изменении температуры и др. Перераспределение напряженного состояния массива, ухудшение прочностных характеристик и уменьшение обводненности приводят к разрушению пород. Для того чтобы избежать этого и продлить срок эксплуатации выработки, контур выработки закрепляют набрызкбетоном.

Исследуем, как бетонирование контура выработки влияет на распределение температурных полей вокруг нее.

Предположим, что рассматриваемое тело изотропно, температурные деформации элементарного объема пренебрежимо малы по сравнению с объемом тела. Основное уравнение теплопроводности имеет вид [1]:

$$c\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + q_v,$$

где c – удельная теплоемкость; ρ – плотность материала; θ – температура; t – время; k – коэффициент теплопроводности; q_v – теплота внутренних источников.

Основной идеей метода конечных элементов является аппроксимация искомой непрерывной функции набором простых, кусочно-непрерывных функций, заданных над ограниченными областями – конечными элементами [2, 3].

Разобьем исследуемую плоскость на N треугольных конечных элементов с узлами $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$, где i, j, k изменяются в пределах от 0 до N и будем считать, что температура θ в узлах i, j, k аппроксимируется линейной функцией:

$$\theta = a_1 + a_2x + a_3y,$$

или в матричной форме:

$$\{\theta\} = [A]\{a\}, \quad (1)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}.$$

Из выражения (1) следует, что

$$\{a\} = [A]^{-1}\{\theta\}.$$

Чтобы перейти от значений функции θ в узлах к ее значению в произвольной точке данного элемента с координатами x, y , вводятся так называемые функции формы. С их помощью температура θ в произвольной точке выражается следующим образом:

$$\theta = N_i\theta_i + N_j\theta_j + N_k\theta_k, \quad (2)$$

где N_i, N_j, N_k – функции формы (влияния узлов):

$$N_i = \frac{1}{2\Delta}(a_i + b_ix + c_iy);$$

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix};$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j;$$

$$b_i = y_j - y_k;$$

$$c_i = x_k - x_j.$$

Причем $N_i + N_j + N_k = 1$ в любой точке элемента, и $N_i = 1$ в i -ом узле, $N_i = 0$ в j и k -ом узлах, Δ – площадь элемента.

Температурные градиенты определяются при дифференцировании выражения (2):

$$\begin{cases} I_x = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \theta_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} \theta_k; \\ I_y = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} \theta_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} \theta_k. \end{cases}$$

Или в матричной форме:

$$\{I\} = [B]\{\theta\}, \quad (3)$$

где

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_i}{2\Delta} & \frac{b_j}{2\Delta} & \frac{b_k}{2\Delta} \\ \frac{c_i}{2\Delta} & \frac{c_j}{2\Delta} & \frac{c_k}{2\Delta} \end{bmatrix} = \text{const.}$$

Количество теплоты, проходящее в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности и называемое плотностью теплового потока, равно [1]:

$$\nu = \frac{dQ}{dSdt}.$$

Согласно закону Фурье, вектор плотности теплового потока определяется соотношением:

$$\bar{v} = -k \operatorname{grad} \theta,$$

где k – коэффициент теплопроводности.

Коэффициент теплопроводности твердых тел может заметно изменяться в зависимости от температуры, влажности, объемной плотности материала. В узком интервале температур зависимость коэффициента теплопроводности от температуры можно аппроксимировать линейной функцией $k = k_0(1 + \beta\theta)$, где k_0 – коэффициент теплопроводности при 0°C ; β – коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально.

Плотности теплового потока v_x, v_y равны:

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = k \{I\} = k [B]\{\theta\} \quad (4)$$

В МКЭ считается, что тепловые потоки между элементами проходят только через узловые точки. Каждый элемент будет иметь значения узловых тепловых потоков в единицу времени q_i, q_j, q_k . При установившемся процессе $q_i + q_j + q_k = 0$.

Связь между узловыми тепловыми потоками и узловыми температурами устанавливается согласно известному принципу возможных вариаций: в замкнутой области установившегося потока при возможном бесконечно малом изменении температур дополнительная работа потока на замкнутом контуре должна быть равна соответствующей дополнительной работе в пределах области [4, 5].

Этот принцип является одной из возможных физических интерпретаций известного в вариационном исчислении способа решения дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями путем минимизации функционала.

Дополнительная работа потока на контуре A_K равна сумме произведений узловых тепловых потоков и вариаций температур:

$$A_K = \{Q\}^T \{\partial p\}. \quad (5)$$

Вариации температурных градиентов равны (из соотношения (3)):

$$\{\partial I\} = [B]\{\partial \theta\}. \quad (6)$$

Дополнительная работа потока в пределах элемента A_{BH} равна интегралу по площади элемента от произведения скоростей на вариации температурных градиентов:

$$A_{BH} = \int_S (q_x dI_x + q_y dI_y) dS = \int_S \{dI\}^T \{q\} dS \quad (7)$$

Разбиение интеграла по площади на сумму интегралов по элементам дает возможность учитывать свойства каждого элемента в отдельности. Это является важной особенностью метода конечных элементов.

Приравнивая выражения (5) и (7), при подстановке в них выражений для плотности теплового потока (4) и (6), получим в матричной форме:

$$\{q\} = k \int_S [B]^T [B] \{\theta\} dS = [P] \{\theta\}$$

где k – коэффициент теплопроводности породы;

$[P]$ – матрица теплопроводности элемента, представляющая собой набор коэффициентов системы линейных уравнений, связывающих N узловых температур с N узловыми количествами теплоты. После преобразований она имеет вид:

$$[P] = \begin{bmatrix} -(a+b) & a & b \\ a & -(a+c) & c \\ b & c & -(b+c) \end{bmatrix};$$

$$a = \Delta k [(y_k - y_i)(y_j - y_k) + (x_i - x_k)(x_k - x_j)]$$

$$b = \Delta k [(y_j - y_k)(y_i - y_j) + (x_k - x_j)(x_j - x_i)]$$

$$c = \Delta k [(y_i - y_j)(y_k - y_i) + (x_j - x_i)(x_i - x_k)]$$

То есть, в установившемся режиме, связь между узловыми тепловыми потоками $\{q\}$ и узловыми температурами $\{\theta\}$ определяется формулой:

$$\{q\} = [P] \{\theta\} \quad (8)$$

Для решения задачи неустановившегося теплового потока необходимо ввести понятие матрицы теплоемкости, вывод которой представлен в [4].

Если в пределах элемента теплоемкость постоянна, т.е. $c_i = c_j = c_k = c$, то матрица теплоемкости имеет вид:

$$[c] = \frac{1}{48} \Delta \rho c \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

В [4] вводится понятие матрицы теплообмена. Пусть элемент i, j, k всей своей площадью соприкасается с некоторой внешней средой, закон изменения температуры которой во времени и пространстве задан:

$$\theta^{6H} = \theta^{6H}(t, x, y).$$

Таким образом, в районе узлов внешняя среда будет иметь температуры $\theta_i^{6H}, \theta_j^{6H}, \theta_k^{6H}$. Теплообмен элемента i, j, k с внешней средой происходит по закону:

$$q^{об} = \lambda (\theta^{6H} - \theta), \quad (9)$$

где $q^{об}$ – теплота, протекающая через единицу площади контакта в единицу времени; λ – коэффициент теплообмена; θ^{6H} – температура внешней среды; θ – температура элемента.

Авторами [4, 5] показывается, что

$$\{q^{об}\} = [\lambda] \{\theta^{6H} - \theta\},$$

где $\{q^{об}\} = \begin{Bmatrix} q_i^{об} \\ q_j^{об} \\ q_k^{об} \end{Bmatrix}$; $[\lambda] = \frac{1}{12} \Delta \lambda \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ – матрица теплообмена;

$$\{\theta^{6H} - \theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_i^{6H} - \theta_i \\ \theta_j^{6H} - \theta_j \\ \theta_k^{6H} - \theta_k \end{Bmatrix};$$

λ – коэффициент теплообмена поверхности элемента с окружающей средой.

Подобно тому, как матрицы теплопроводности элементов объединяются в матрицу теплопроводности всей системы элементов, так и матрицы теплоемкости и теплообмена элементов объединяются в одноименные матрицы системы, которые связывают между собой следующие параметры:

$$\{Q\} = [C]\{\theta\}, \quad (10)$$

$$\{q^{об}\} = [\Lambda]\{\theta^{сн} - \theta\}, \quad (11)$$

где $\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{Bmatrix}$ – вектор теплоты в узлах;

$[C] = \sum_{n=1}^N [C]_n$ – матрица теплоемкости системы;

$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \end{Bmatrix}$ – вектор узловых температур;

$\{q^{об}\} = \begin{Bmatrix} q_1^{об} \\ \vdots \\ q_N^{об} \end{Bmatrix}$ – вектор теплообменных потоков;

$[\Lambda]$ – матрица теплообмена системы;

$$\{\theta^{сн} - \theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_1^{сн} - \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N^{сн} - \theta_N \end{Bmatrix};$$

N – число узлов системы; M – число элементов.

При неустановившейся теплопроводности происходит изменение температуры элементов во времени и, соответственно, изменение теплоты в узлах и теплообменных потоков.

Расчет параметров состояния системы проводится пошагово малыми интервалами времени Δt . Можно утверждать, что для каждого узла системы с момента времени t до момента $t + \Delta t$ изменение узловой теплоты равно сумме

притоков в этот узел тепла из окружающих элементов за счет теплопроводности или теплообмена:

$$\{Q\}_t - \{Q\}_{t+\Delta t} = \int_t^{t+\Delta t} \{q\} dt + \int_t^{t+\Delta t} \{q^{об}\} dt \quad (12)$$

Будем считать, что в течение интервала Δt узловые температуры, а с ними и матрицы $\{q\}$ и $\{q^{об}\}$, изменяются в линейной зависимости от времени. Тогда уравнение (12) примет вид:

$$\{Q\}_t - \{Q\}_{t+\Delta t} = \frac{\{q\}_t - \{q\}_{t+\Delta t}}{2} \Delta t + \frac{\{q^{об}\}_t - \{q^{об}\}_{t+\Delta t}}{2} \Delta t \quad (13)$$

Подставляя в формулу (13) выражения (8), (10) и (11), после преобразований получим:

$$\left([C] + \frac{\Delta t}{2} [H] - \frac{\Delta t}{2} [\Lambda] \right) \{\theta\}_{t+\Delta t} = \left([C] - \frac{\Delta t}{2} [H] + \frac{\Delta t}{2} [\Lambda] \right) \{\theta\}_t - \frac{\Delta t}{2} [\Lambda] \{\theta_t^{сн} + \theta_{t+\Delta t}^{сн} \} \quad (14)$$

Уравнение (14) можно выразить в виде:

$$[\overline{P}] \{\theta\}_{t+\Delta t} = \{\overline{q}\}, \quad (15)$$

где

$$[\overline{P}] = [C] + \frac{\Delta t}{2} [H] - \frac{\Delta t}{2} [\Lambda];$$

$$\{\overline{q}\} = \left([C] - \frac{\Delta t}{2} [H] + \frac{\Delta t}{2} [\Lambda] \right) \{\theta\}_t - \frac{\Delta t}{2} [\Lambda] \{\theta_t^{сн} + \theta_{t+\Delta t}^{сн} \}$$

Полагая, что на момент времени t тепловое состояние системы задано, и считая вектор $\{\theta\}_{t+\Delta t}$ неизвестным, из решения системы уравнений (15) получаем результат распределения температур на момент времени $t + \Delta t$. Этот процесс продолжается от исходного состояния до любого текущего момента времени.

Изложенная процедура решения является устойчивой.

Задачи теплопроводности, связанные с таянием льда, отличаются тем, что в общий баланс тепловых расходов включается теплота его плавления. Распределенная теплота плавления сводится к узлам и характеризуется вектором теплоты плавления. Вектор теплоты плавления элемента i, j, k с единичной толщиной имеет вид:

$$\begin{Bmatrix} Q_i^{nl} \\ Q_j^{nl} \\ Q_k^{nl} \end{Bmatrix} = \gamma \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \Delta \rho \\ \frac{1}{3} \Delta \rho \\ \frac{1}{3} \Delta \rho \end{Bmatrix},$$

где $Q_{i,j,k}^{nl}$ – узловая теплота плавления; γ – удельная теплота плавления единицы массы вещества; Δ – площадь элемента i, j, k ; ρ – плотность вещества.

Из векторов $\{Q_{nl}\}$ элементов формируется вектор узловой теплоты плавления всей системы.

Процедура решения следующая: проводится расчет поля температур в заданной области с заданными начальными и граничными условиями через определенные промежутки времени путем последовательного решения системы уравнений (15).

После каждого интервала времени Δt делается проверка узловых температур. Если температура i -го узла достигла температуры плавления, то в матрицу внутренних источников тепла добавляется соответствующий член, характеризующий выделение теплоты при таянии определенной массы льда.

Для примера рассмотрим задачу об оттаивании пород вокруг выработки, проведенной в условиях криолитозоны. Рассчитаем, как изменяется процесс оттаивания вмещающих пород с начальной температурой -5°C вокруг выработки, температура воздуха в которой 5°C , после закрепления ее бортов набрызгбетоном на 12,5 см.

Принятые при расчетах теплофизические характеристики материалов представлены в табл. 1 [7]:

Таблица 1 – Теплофизические характеристики материалов

Материал	Теплоемкость, c , ккал кг · град	Теплопровод- ность, k , ккал м · час · град	Температуро- проводность, $\lambda \cdot 10^4, \frac{\text{м}^2}{\text{час}}$	Удельный вес, $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
Известняк	0,2	2,2	43,7	2500
Бетон	0,2	0,3	14,0	2000

Исследуемую область разобьем на треугольные конечные элементы (рис. 1):

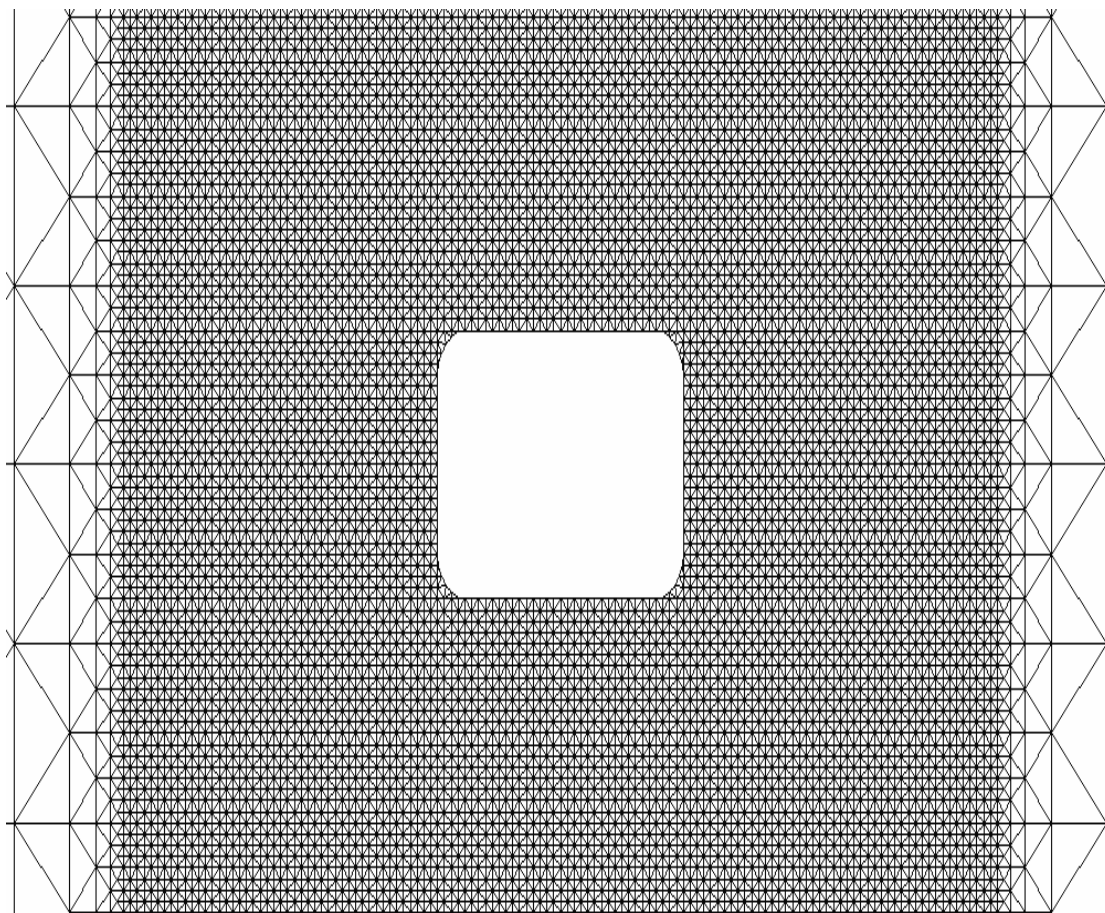
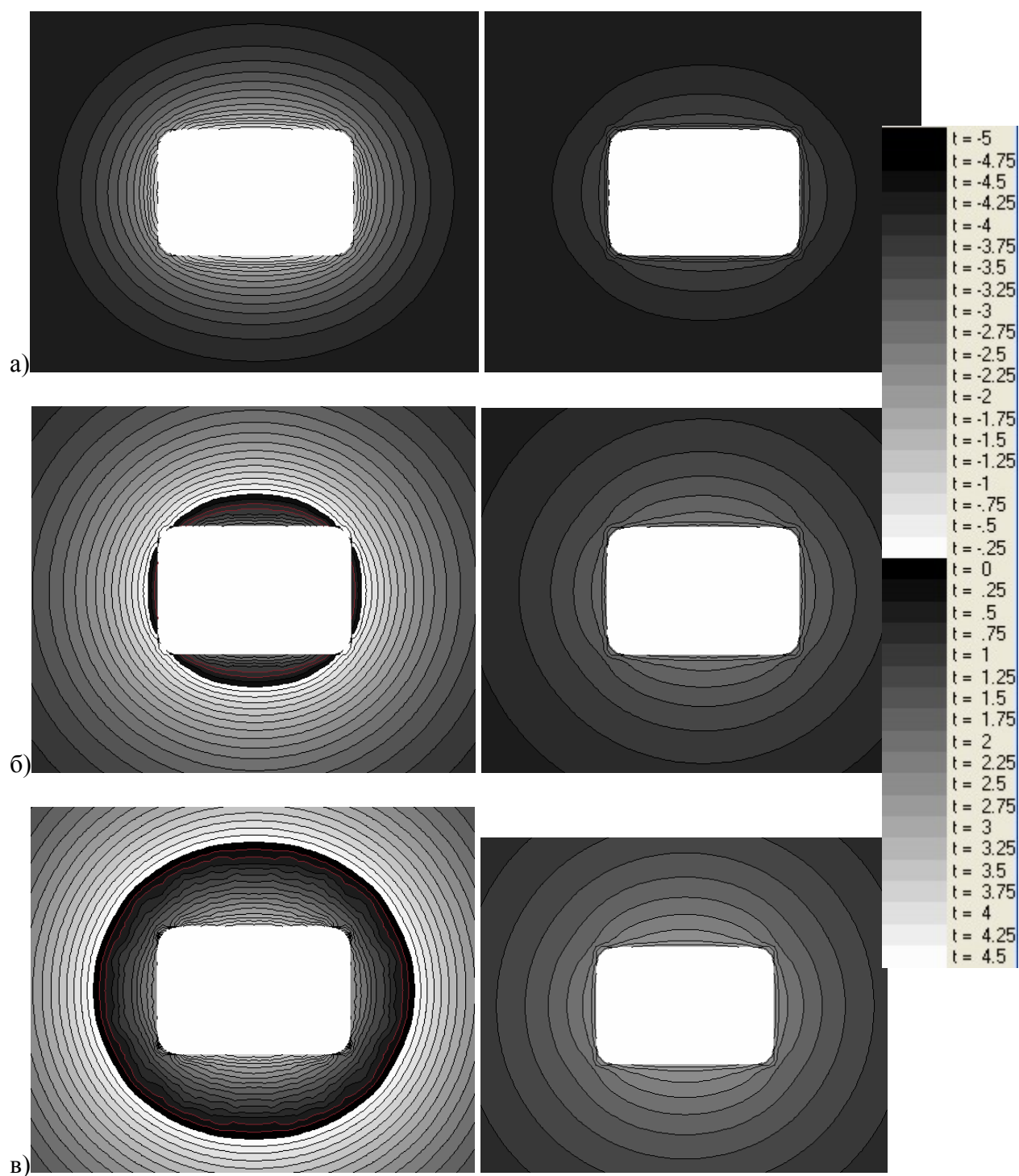


Рис. 1 – Центральная часть конечно-элементной сетки к расчетной схеме

Будем считать, что пористость пород – 5%, и поры заполнены влагой. При таянии воды на границе фазового перехода выделяется теплота 334 кДж/кг.

На рис. 2 показаны температурные поля вокруг выработки в различные моменты времени для двух случаев: без покрытия и с набрызгбетонным покрытием.

Видно, что изменение температуры в первом случае происходит более интенсивно

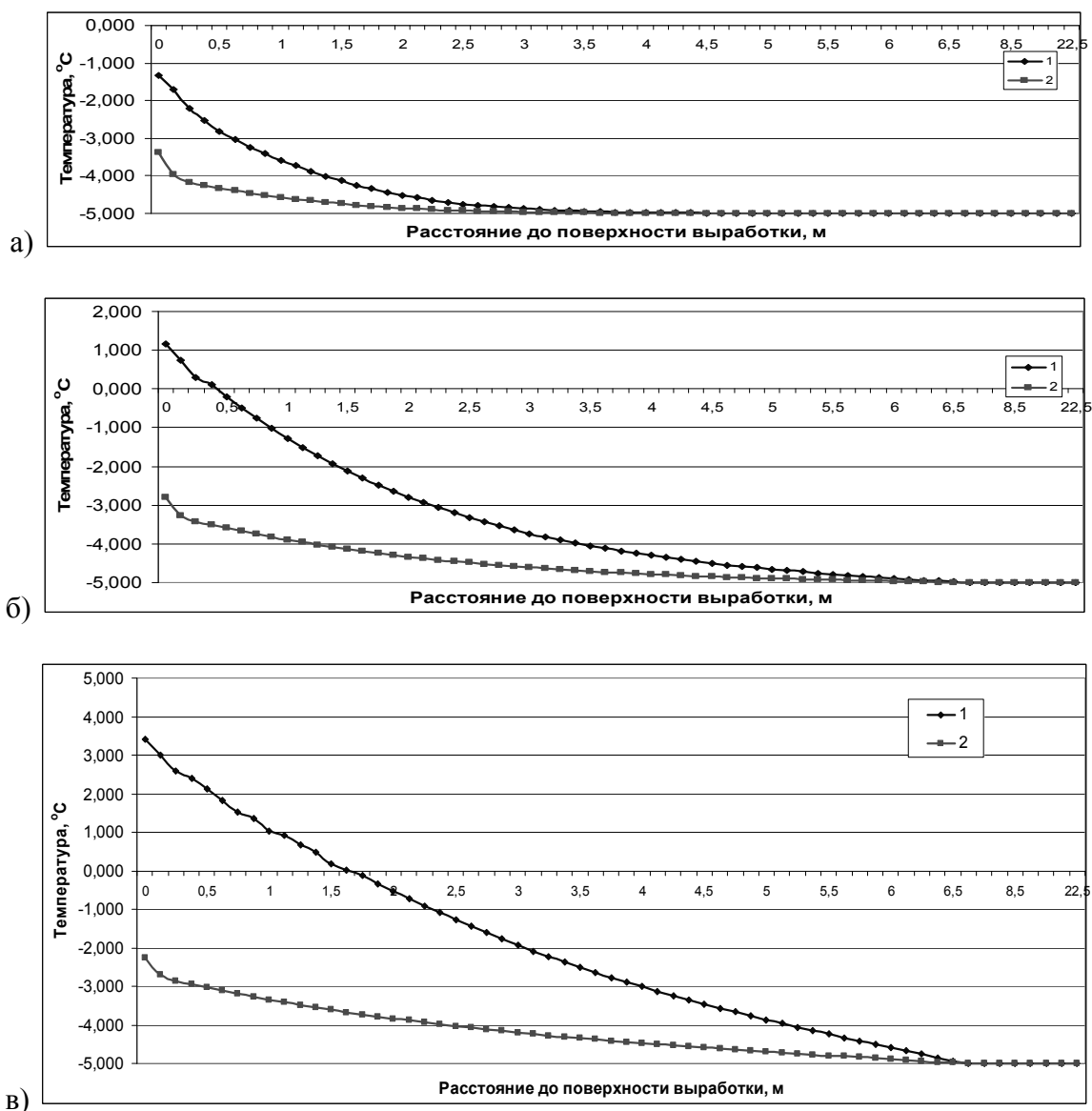


слева – без покрытия, справа – с набрызгбетонным покрытием

а) через 3 ч после начала процесса; б) через 13 ч; в) через 35 ч

Рис. 2 – Температурные поля t , °C, вокруг выработки в различные моменты времени

Прогревание пород вглубь массива представлено на рис. 3. По оси x показано расстояние от поверхности выработки вглубь массива.



1 – без покрытия, 2 – с набрызгбетонным покрытием
 а) через 3 ч после начала процесса; б) через 13 ч; в) через 35 ч

Рис. 3 – Изменение температуры от поверхности вглубь массива в различные моменты времени

Из изложенного следует, что, применяя набрызгбетонное покрытие контура выработки, проведенной по смерзшимся породам криолитозоны, можно предотвратить разрушение приконтурных пород, происходящее в результате их оттаивания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1978. – 328 с.
2. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. – Butterworth-Heinemann, 2000. – 690 p.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Пер.с англ. Под ред. Победри Б.Е. – М. Мир, 1975. – 542.
4. Амусин Б.З., Фадеев А.Б. Метод конечных элементов при решении задач горной геомеханики. – М. Недра, 1975. – 144 с.
5. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. – М. Недра, 1987. – 224 с.
6. Wilson E.L., Nickell R.E. Application of the finite element method to heat conduction analysis. Nuclear Engng. and Design, 4, №3, 1966.
7. Справочник горного инженера. – Под ред. В.К. Бучнева. – М. Государственное научно-техническое издательство литературы по горному делу, 1960. – 792 с.